



СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАБОРЕ ВЫСОТЫ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

М. Б. Алесов, А. В. Калябин

Раменское приборостроительное конструкторское бюро

Рассмотрена задача вертикального маневрирования (набор высоты) летательного аппарата. Выполнен синтез оптимального по критерию максимального быстродействия управления с учётом ограничения нормальной перегрузки и допустимого угла наклона траектории (угла наклона воздушной скорости). Показано, что вертикальная траектория имеет три участка, соответствующие постоянным значениям перегрузки. Получены уточнённые выражения изменения фазовых переменных модели движения (скорость, угол наклона траектории, высота, горизонтальная дальность), формулы для расчёта моментов времени переключения кусочно-постоянного управления и характерных состояний фазовых переменных. Представлен пример расчёта параметров управления и результаты моделирования вертикальной траектории летательного аппарата.

Ключевые слова: вертикальное маневрирование летательного аппарата, набор высоты, нормальная перегрузка, угол наклона траектории, угол наклона вектора воздушной скорости.

Для цитирования:

Алесов, М. Б. Синтез оптимального управления при наборе высоты летательным аппаратом / М. Б. Алесов, А. В. Калябин // Системный анализ и логистика. – 2026. – № 2(50). – с. 19-34. DOI: 10.31799/2077-5687-2026-2-19-34.

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL IN CLIMBING OF AN AIRCRAFT

M. B. Alesov, A. V. Kalyabin

Ramenskoye Instrument-Building Design Bu-reau Corp.

The problem of vertical maneuvering (climbing) of an aircraft is considered. Synthesis of optimal control by the time criterion is performed taking into account the limitation of normal overload and the permissible angle of inclination of the trajectory (angle of inclination of the air-speed vector). It is shown that the optimal trajectory has three sections corresponding to constant values of overload. Refined expressions for changes in the phase variables of the motion model (speed, angle of inclination of the trajectory, altitude, horizontal distance), formulas for calculating the moments of time of switching piecewise constant control and characteristic states of phase variables are obtained. Example of calculation of control parameters and results of modeling of vertical trajectories of the aircraft are presented.

Keywords: vertical maneuvering of aircraft, climbing, normal overload, trajectory inclination angle, air-speed vector inclination angle.

For citation:

Alesov, M. B. Synthesis of optimal control in climbing of an aircraft / M. B. Alesov, A. V. Kalyabin // System analysis and logistics. – 2026. – № 2(50). – p. 19-34. DOI: 10.31799/2077-5687-2026-2-19-34.

Введение

Современные условия эксплуатации навигационно-пилотажных бортовых вычислительных комплексов определяют необходимость выполнения воздушных манёвров летательными аппаратами (ЛА) с высокой точностью. Одной из важных задач вертикального маневрирования, возникающих как в особых, так и стандартных условиях полёта, является операция скоростного набора высоты ЛА.

Традиционно при синтезе программного управления и при аналитических расчётах числовых характеристик соответствующих траекторий используются упрощённые математические методы, основанные на усреднённых оценках и энергетических подходах [1], [2]. Для обеспечения повышенной точности предлагается решать задачу расчёта траектории вертикального движения и синтеза соответствующего программного управления, используя методы теории оптимального управления и аналитические решения дифференциальных уравнений. Современные пилотажно-навигационные комплексы обеспечивают управление в вертикальной плоскости не по заданному углу отклонения рулей высоты, а по заданному значению нормальной перегрузки с автоматическим учётом массы ЛА, внешних условий и



автоматическим изменением тяги двигателей. Данная статья посвящена вопросам синтеза оптимального по критерию быстродействия управления при ограничениях на величину управляющего воздействия (нормальной перегрузки) и ограничении переменной состояния – угла наклона траектории (УНТ).

Общие вопросы синтеза программного управления динамическими системами изложены в трудах Атанса Ж. и Фалба П. Л. [3], Афанасьева В. Н., Колмановского В. Б., Носова В. Р. [4]. Особенности применения методов оптимизации для управления движением механических систем рассмотрены в работах Черноусько Ф. Л. и др. [5].

Статья посвящена синтезу программного оптимального алгоритма, обеспечивающего выполнение вертикального маневрирования дозвуковыми ЛА устойчивой схемы.

1) Модель движения и особенности управления

Движение летательного аппарата (ЛА) в вертикальной плоскости описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния V , θ и H [1]:

$$\frac{dV}{dt} = (n_x - \sin \theta) g, \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = (n_y - \cos \theta) \frac{g}{V}, \quad (2)$$

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \theta, \quad (3)$$

где V – истинная воздушная скорость ЛА, м/с; t – время, с; θ – угол наклона вектора воздушной скорости (УНВС), отсчитываемый от горизонта, положительное направление – вверх, рад; g – ускорение свободного падения, м/с²; $n_x = \frac{P}{mg} - \frac{X_a}{mg}$ – тангенциальная перегрузка; P – сила тяги двигательной установки, Н; X_a – аэродинамическое лобовое сопротивление ЛА, Н; $n_y = \frac{Y_a}{mg}$ – нормальная перегрузка; Y_a – аэродинамическая подъёмная сила ЛА, Н; H – высота ЛА, м.

Выполним замену переменных:

$$v = \frac{V}{V_0}, \quad \tau = t \frac{g}{V_0}, \quad h = H \frac{g}{V_0^2}, \quad (4)$$

где V_0 – характерная скорость (скорость установившегося движения ЛА на прямолинейном участке набора), м/с; τ – нормированное время; h – нормированная высота; v – нормированная скорость.

В результате получим модель вертикального движения ЛА в нормированной форме

$$\frac{dv}{d\tau} = n_x - \sin \theta, \quad (5)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = (n_y - \cos \theta) \frac{1}{v}, \quad (6)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = v \sin \theta. \quad (7)$$

На участке установившегося движения скорость движения ЛА сохраняется постоянной – рекомендуемой. В этом случае можно полагать, что функция скорости $v(\theta)$ задана и



уравнение (6) при синтезе оптимального управления не используется и рассчитывается лишь после определения управляющего воздействия. Кроме того, горизонтальное перемещение ЛА x при выполнении операции также может быть рассчитано интегрированием уравнения (9) после синтеза управления и определения параметров состояния v, θ . По этой причине для формирования управления можно использовать два уравнения (6), (7) с переменными состояния θ, h .

Содержательно задача заключается в построении оптимальной траектории набора высоты с учётом требований и ограничений процедуры, а также воздействия ветра.

Задача управления набором высоты ЛА формулируется следующим образом. При заданном начальном значении высоты и угла наклона траектории (горизонтальный полёт)

$$h(0) = h_1, \quad \theta(0) = 0 \quad (8)$$

следует перевести ЛА на новый высотный уровень, при этом конечное состояние должно быть

$$h(\tau_2) = h_2, \quad \theta(\tau_2) = 0, \quad (9)$$

где h_1, h_2 – заданные значения начальной и конечной высоты набора; τ_2 – время окончания манёвра (не задано и подлежат расчёту).

В качестве примера на рисунке 1 показана траектория набора высоты ЛА и отмечены переменные состояния и характерные параметры манёвра.

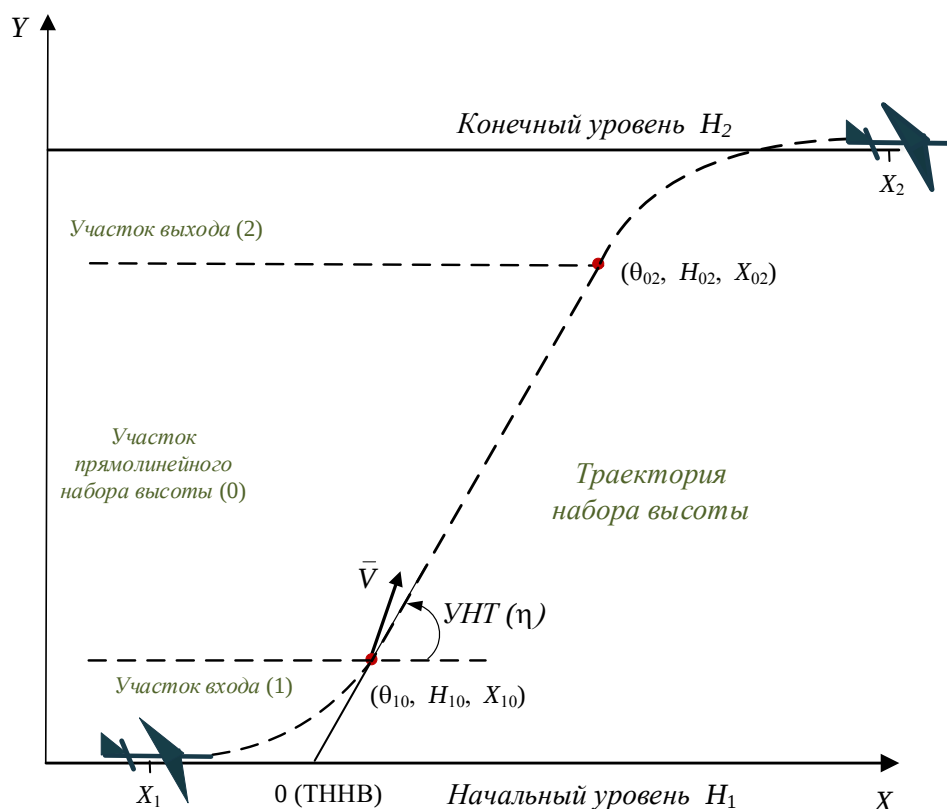


Рис. 1. Схема манёвра набора высоты

В качестве функции управления (управляющего воздействия) используется величина нормальной перегрузки n_y , на которую накладываются ограничения

$$n_{y,\min} \leq n_y \leq n_{y,\max}, \quad (10)$$



где $n_{y,\min}, n_{y,\max}$ – минимальное и максимальное значение перегрузки.

При этом также учитывается ограничение на переменную состояния – УНВС

$$-\theta(\tau) + \theta_0 \geq 0, \quad \theta_0 > 0, \quad (11)$$

где θ_0 – предельно допустимое значение угла.

Оптимальное управление выбирается, исходя из требования максимального быстродействия, при этом функционал качества управления формально имеет вид

$$J(n_y) = \int_0^{\tau_2} 1 d\tau \rightarrow \min. \quad (12)$$

Функция Понтрягина сформулированной задачи оптимального управления для системы уравнений (8), (7) записывается как

$$\Pi(h, \theta; \lambda_1, \mu; n_y) = \lambda_1 v \sin \theta - \lambda_2 \frac{\cos \theta}{v} + n_y \frac{\lambda_2}{v} - 1 - \mu(\theta - \theta_0), \quad (13)$$

где μ – множитель Лагранжа, соответствующий ограничению фазовой координаты (13); λ_1, λ_2 – сопряжённые функции, являющиеся решениями сопряжённой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа)

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\tau} = -\frac{\partial \Pi}{\partial h} = 0, \\ \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = -\lambda_1 v \cos \theta - \lambda_2 \frac{\sin \theta}{v} + \mu. \end{cases} \quad (14)$$

Также принимаются во внимание условие дополняющей нежесткости и неотрицательности множителя Лагранжа:

$$-\mu(\tau)[\theta(\tau) - \theta_0] = 0, \quad \mu(\tau) \geq 0. \quad (15)$$

Применение принципа максимума Понтрягина Л.С. позволяет установить вид функции управления $n_y(\tau)$. В условиях, когда ограничение по УНВС не достигнуто, функция управления $n_y(\tau)$ должна иметь кусочно-постоянный вид:

$$n_y(\tau) = \begin{cases} n_{y,\max}, & \text{если } \lambda_2(\tau) > 0, \\ n_{y,\min}, & \text{если } \lambda_2(\tau) < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Из первого уравнения сопряжённой системы (16) следует, что первая сопряжённая функция постоянна, т.е. $\lambda_1(\tau) = \text{const}$. При выполнении манёвра предполагается, что УНВС

находится в пределах $|\theta(\tau)| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ и не меняет знак. В таком случае второе уравнение сопряжённой системы (16) представляет собой уравнение аperiodического звена первого порядка с переменным, однополярным параметром. Решением такого уравнения является монотонная функция и число участков знак постоянства сопряжённой функции $\lambda_2(\tau)$ не может быть больше двух, при этом одного участка постоянного управления недостаточно для выполнения краевых условий задачи. На основании этого можно сделать следующие выводы.



Во-первых, функция оптимального управления $n_y(\tau)$ является кусочно-постоянной и содержит два или три участка постоянного управления: участок входа в манёвр (для обозначения параметров будем использовать индекс 1), участок прямолинейного вертикального движения (индекс 0), участок выхода из манёвра (индекс 2), как показано на рисунке 1. При малой разности начальной и конечных высоты промежуточный участок прямолинейного движения может отсутствовать.

Во-вторых, первый и последний участки выполняются при экстремальных значениях перегрузок. А именно, при наборе участок входа выполняется с максимальной перегрузкой $n_y = n_{y,\max}$, а участок выхода – с минимальной $n_y = n_{y,\min}$.

В-третьих, участок прямолинейного вертикального движения выполняется при максимальном положительном значении УНВС θ_0 :

Выберем прямоугольную правую систему координат X, Y, Z , причём ось X направлена по горизонтальной путевой скорости и лежит в плоскости набора высоты; ось Y направлена вертикально вверх; ось Z направлена по нормали к плоскости вертикального манёвра и дополняет систему до правой. Вертикальный манёвр выполняется в заданной плоскости (X, Y), при этом горизонтальная проекция вектора воздушной скорости составляет с вертикальной

плоскостью угол δ – обратный угол сноса, рассчитываемый как $\delta = -\arcsin \frac{U_z}{V_0 \cos \theta}$, где U_z – боковая составляющая ветра, м/с.

Дополнительно для траекторных задач продольное горизонтальное перемещение ЛА при маневрировании (горизонтальную дальность). Кинематическое уравнение движения вдоль оси X запишется как

$$\frac{dX}{dt} = V \cos \theta \cos \delta + U_x, \quad (17)$$

или с учётом нормирования

$$x = X \frac{g}{V_0^2}, \quad u_x = \frac{U_x}{V_0}, \quad (18)$$

уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = v \cos \theta \cos \delta + u_x, \quad (19)$$

где U_x, u_x – скорость ветра вдоль оси X .

2) Решение уравнений движения

Траектория вертикального движения ЛА состоит из трёх участков: участок входа в манёвр, участок прямолинейного вертикального движения, участок выхода из манёвра. Рассмотрим решение уравнений движения на каждом участке по-отдельности.

Поскольку управление $n_y(\tau)$ имеет только три возможных дискретных значения: $0, \pm u_0$, запишем решения дифференциальных уравнений (11) в этих частных случаях.

2.1 Участок установившегося прямолинейного движения

Рассмотрим установившееся движение, которое выполняется при постоянной скорости $V(t) = V_0$ ($v(\tau) = 1$) и постоянным углом наклона траектории $\theta(\tau) = \theta_0$. Нормальная перегрузка в этом случае согласно формуле (6) постоянна и равна



$$n_{y,0} = \cos \theta_0. \quad (20)$$

Изменение высоты зависит от времени линейно

$$h(\tau) = h_{10} + \sin \theta_0 \tau, \quad (21)$$

где h_{10} – нормированная высота после входа в манёвр.

Соответственно, длительность участка

$$\Delta \tau_0 = \frac{h_{02} - h_{10}}{\sin \theta_0} = \frac{\Delta h_0}{\sin \theta_0}, \quad (22)$$

где h_{02} – нормированная высота в начале участка выхода из манёвра; Δh_0 – изменение высоты на участке установившегося движения.

Горизонтальное смещение на участке зависит от времени линейно

$$x(\tau) = x_{10} + \cos \delta \cos \theta_0 \tau + u_x \tau, \quad (23)$$

при этом полное смещение на участке равно

$$\Delta x_0 = x_{02} - x_{10} = \cos \delta \cos \theta_0 \Delta \tau_0 + u_x \Delta \tau_0, \quad (24)$$

где x_{10} – нормированное горизонтальное смещение в начале участка установившегося движения; x_{02} – нормированное смещение в начале участка выхода из манёвра.

2.2 Участок входа в манёвр

При входе в режим изменение скорости рассчитывают при условиях

$$n_x \approx 0, \quad n_y = \text{const} = n_{y,1} = n_{y,\max}. \quad (25)$$

Дифференциальное соотношение

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{-\sin \theta}{n_{y,1} - \cos \theta} v \quad (26)$$

позволяет получить зависимость изменения скорости

$$v(\theta) = \frac{|n_{y,1} - \cos \theta_0|}{|n_{y,1} - \cos \theta|} v_0, \quad (27)$$

где v_0 – нормированная скорость на установившемся участке, $v_0 = 1$.

Отсюда при заданной скорости установившегося движения значение начальной скорости равно (при начальном угле наклона $\theta_1 = 0$)

$$v_1 = \frac{|n_{y,1} - \cos \theta_0|}{|n_{y,1} - 1|}. \quad (28)$$

Зависимость угла наклона от времени определяется дифференциальным уравнением



$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{|n_{y,1} - \cos \theta|}{|n_{y,1} - \cos \theta_0|} (n_{y,1} - \cos \theta) = \frac{(n_{y,1} - \cos \theta)^2}{|n_{y,1} - \cos \theta_0|} \quad (29)$$

и представляет собой соотношения [6]:

$$\tau(\theta) = \frac{\sin \theta |n_{y,1} - \cos \theta_0|}{(n_{y,1}^2 - 1)(n_{y,1} - \cos \theta)} + 2n_{y,1} |n_{y,1} - \cos \theta_0| \arctg\left(\frac{(n_{y,1} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{n_{y,1}^2 - 1}}\right) (n_{y,1}^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}. \quad (30)$$

Длительность участка входа равна

$$\Delta\tau_1 = \frac{\sin \theta_0}{n_{y,1}^2 - 1} + 2n_{y,1} (n_{y,1} - \cos \theta_0) \arctg\left(\frac{(n_{y,1} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{n_{y,1}^2 - 1}}\right) (n_{y,1}^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}; \quad (31)$$

Фазовое соотношение

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{(n_{y,1} - \cos \theta_0)^2 v_0^2 \sin \theta}{(n_{y,1} - \cos \theta)^3} \quad (32)$$

позволяет получить зависимость изменения высоты с углом УНВС (отсчёт высоты от точки с УНВС $\theta = 0$)

$$h(\theta) = h_1 + (n_{y,1} - \cos \theta_0)^2 \left(\frac{1}{2(n_{y,1} - 1)^2} - \frac{1}{2(n_{y,1} - \cos \theta)^2} \right). \quad (33)$$

Изменение высоты на участке входа

$$\Delta h_1 = \frac{(n_{y,1} - \cos \theta_0)^2}{2(n_{y,1} - 1)^2} - \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Для вычисления зависимости высоты от времени следует использовать суперпозицию $h(\theta(\tau))$ выражения $\theta(\tau)$ из обращения формулы (30) и зависимости $h(\theta)$ формулы (33).

Фазовое соотношение

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{(n_{y,1} - \cos \theta_0)^2 v_0^2 \cos \delta \cos \theta}{(n_{y,1} - \cos \theta)^3} + \frac{|n_{y,1} - \cos \theta_0| v_0 u_x}{(n_{y,1} - \cos \theta)^2} \quad (35)$$

позволяет получить зависимость изменения горизонтального смещения с углом наклона [7]

$$\begin{aligned} x(\theta) = & \frac{u_x |b| \sin \theta}{(n_{y,1}^2 - 1)(n_{y,1} - \cos \theta)} + 2u_x n_{y,1} |b| \arctg\left(\frac{(n_{y,1} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{n_{y,1}^2 - 1}}\right) (n_{y,1}^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} + \\ & + \frac{c \sin \theta (2n_{y,1}^3 - n_{y,1}^2 \cos \theta + n_{y,1} - 2 \cos \theta)}{2(n_{y,1}^2 - 1)^2 (n_{y,1} - \cos \theta)^2} + 3n_{y,1} c \arctg\left(\frac{(n_{y,1} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n_{y,1}^2}}\right) (n_{y,1}^2 - 1)^{-\frac{5}{2}}; \end{aligned} \quad (36)$$

где $b = n_{y,1} - \cos \theta_0$, $c = (n_{y,1} - \cos \theta_0)^2 \cos \delta$.



Горизонтальное смещение на участке входа

$$\Delta x_1 = \frac{u_x \sin \theta_0}{n_{y,1}^2 - 1} + 2 u_x n_{y,1} |b| \operatorname{arctg}\left(\frac{(n_{y,1} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{n_{y,1}^2 - 1}}\right) (n_{y,1}^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{c \sin \theta_0 (2n_{y,1}^3 - n_{y,1}^2 \cos \theta_0 + n_{y,1} - 2 \cos \theta_0)}{2 (n_{y,1}^2 - 1)^2 (n_{y,1} - \cos \theta_0)^2} + 3 n_{y,1} c \operatorname{arctg}\left(\frac{(n_{y,1} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{n_{y,1}^2 - 1}}\right) (n_{y,1}^2 - 1)^{-\frac{5}{2}}. \quad (37)$$

Для вычисления зависимости смещения от времени следует использовать суперпозицию $x(\theta(\tau))$ выражения $\theta(\tau)$ из обращения формулы (30) и зависимости $x(\theta)$ формулы (36).

2.3 Участок выхода из манёвра

При выходе из режима изменение скорости рассчитывается при условиях

$$n_x \approx 0, \quad n_y = \text{const} = n_{y,2} = n_{y,\min}. \quad (38)$$

Зависимость изменения скорости согласно уравнению (26) и формуле (27)

$$v(\theta) = \frac{|n_{y,2} - \cos \theta_0|}{|n_{y,2} - \cos \theta|} v_0. \quad (39)$$

Отсюда значение скорости в конце манёвра равно

$$v_2 = \frac{|n_{y,2} - \cos \theta_0|}{|n_{y,2} - 1|}. \quad (40)$$

Зависимость угла наклона m от времени определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{|n_{y,2} - \cos \theta|}{|n_{y,2} - \cos \theta_0|} (n_{y,2} - \cos \theta) = - \frac{(n_{y,2} - \cos \theta)^2}{|n_{y,2} - \cos \theta_0|}. \quad (41)$$

и представляет собой (отсчёт времени от момента завершения участка, т.е. время на участке отрицательно):

$$\tau(\theta) = \frac{\sin \theta |n_{y,2} - \cos \theta_0|}{(1 - n_{y,2}^2) (n_{y,2} - \cos \theta)} + 2 n_{y,2} |n_{y,2} - \cos \theta_0| \operatorname{arth}\left(\frac{-(n_{y,2} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n_{y,2}^2}}\right) (1 - n_{y,2}^2)^{-\frac{3}{2}}; \quad (42)$$

Длительность участка выхода равна

$$\Delta \tau_2 = - \frac{\sin \theta_0}{n_{y,2}^2 - 1} - 2 n_{y,2} (n_{y,2} - \cos \theta_0) \operatorname{arth}\left(\frac{(n_{y,2} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{1 - n_{y,2}^2}}\right) (1 - n_{y,2}^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (43)$$

Зависимость изменения высоты с углом наклона определяется уравнением (32) и имеет вид (отсчёт высоты от точки завершения участка с УНТ $\theta = 0$)



$$h(\theta) = (n_{y,2} - \cos \theta_0)^2 \left(\frac{1}{2(n_{y,2} - 1)^2} - \frac{1}{2(n_{y,2} - \cos \theta)^2} \right). \quad (44)$$

Изменение высоты на участке выхода

$$\Delta h_2 = \frac{1}{2} - \frac{(n_{y,2} - \cos \theta_0)^2}{2(n_{y,2} - 1)^2}. \quad (45)$$

Для вычисления зависимости высоты от времени следует использовать суперпозицию $h(\theta(\tau))$ выражения $\theta(\tau)$ из обращения формулы (42) и зависимость $h(\theta)$ формулы (44).

Фазовое соотношение

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{(n_{y,2} - \cos \theta_0)^2 v_0^2 \cos \delta \cos \theta}{(n_{y,2} - \cos \theta)^3} - \frac{|n_{y,2} - \cos \theta_0| v_0 u_x}{(n_{y,2} - \cos \theta)^2} \quad (46)$$

позволяет получить зависимость изменения горизонтального смещения с углом наклона (отсчёт от момента завершения манёвра)

$$\begin{aligned} x(\theta) = & \frac{u_x |b| \sin \theta}{(1 - n_{y,2}^2)(n_{y,2} - \cos \theta)} - 2 u_x n_{y,2} |b| \operatorname{arth} \left(\frac{(n_{y,2} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n_{y,2}^2}} (1 - n_{y,2}^2)^{\frac{3}{2}} + \right. \\ & \left. + \frac{c \sin \theta (2n_{y,2}^3 - n_{y,2}^2 \cos \theta + n_{y,2} - 2 \cos \theta)}{2(n_{y,2}^2 - 1)^2 (n_{y,2} - \cos \theta)^2} - 3 n_{y,2} c \operatorname{arth} \left(\frac{(n_{y,2} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n_{y,2}^2}} (1 - n_{y,2}^2)^{\frac{5}{2}}, \right. \right. \end{aligned} \quad (47)$$

где $b = n_{y,2} - \cos \theta_0$, $c = (n_{y,2} - \cos \theta_0)^2 \cos \delta$.

Горизонтальное смещение на участке выхода

$$\begin{aligned} \Delta x_2 = & \frac{u_x \sin \theta_0}{1 - n_{y,2}^2} + 2 u_x n_{y,2} |b| \operatorname{arth} \left(\frac{(n_{y,2} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{1 - n_{y,2}^2}} (1 - n_{y,2}^2)^{\frac{3}{2}} - \right. \\ & \left. - \frac{c \sin \theta_0 (2n_{y,2}^3 - n_{y,2}^2 \cos \theta_0 + n_{y,2} - 2 \cos \theta_0)}{2(n_{y,2}^2 - 1)^2 (n_{y,2} - \cos \theta_0)^2} + 3 n_{y,2} c \operatorname{arth} \left(\frac{(n_{y,2} + 1) \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{1 - n_{y,2}^2}} (1 - n_{y,2}^2)^{\frac{5}{2}}. \right. \right. \end{aligned} \quad (48)$$

Для вычисления зависимости смещения от времени следует использовать суперпозицию $x(\theta(\tau))$ выражения $\theta(\tau)$ из обращения формулы (42) и зависимости $x(\theta)$ формулы (47).

3) Синтез оптимального управления и расчёт характерных параметров состояния

Угол наклона траектории (набора высоты) на участке установившегося движения УНТ η задаётся из условий выполнения манёвра, тогда УНВС θ_0 рассчитывается по формуле

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 \cos \delta + u_x} \quad (49)$$



Горизонтальные расстояния x отсчитываются от точки начала набора O , см. рисунок 1. Дальность начала входа в манёвр (горизонтальное упреждение входа в набор) рассчитывается по формуле

$$x_1 = -\Delta x_1 + \frac{\Delta h_1}{\operatorname{tg} \eta}. \quad (50)$$

Изменение высоты на участке установившегося движения

$$\Delta h_0 = \Delta h - \Delta h_1 - \Delta h_2, \quad (51)$$

где Δh – заданное значение полного изменения высоты в результате манёвра.

Изменение высоты на участке входа и выхода $\Delta h_1, \Delta h_2$ определяется по формулам (34), (45) соответственно.

Значения интервалов времени для участков входа и выхода рассчитываются по формулам (31), (43), а моменты времени (отсчёт от времени входа в манёвр)

$$\tau_{10} = \Delta \tau_1, \quad \tau_{02} = \tau_{10} + \Delta \tau_0, \quad \tau_2 = \tau_{02} + \Delta \tau_2, \quad (52)$$

где τ_{10} – момент времени завершения участка входа и начала установившегося движения;
 τ_{02} – момент времени завершения установившегося движения и начала выхода.

Функция управления – нормальная перегрузка, n_y изменяется кусочно-постоянно согласно формуле

$$n_y(\tau) = n_{y,1} \operatorname{Hev}(\tau) + (n_{y,0} - n_{y,1}) \operatorname{Hev}(\tau - \tau_{10}) + (n_{y,2} - n_{y,0}) \operatorname{Hev}(\tau - \tau_{02}) - n_{y,2} \operatorname{Hev}(\tau - \tau_2), \quad (53)$$

где $\operatorname{Hev}(\tau)$ – функция Хэвисайда.

Обозначения и указания на формулы расчёта переменных состояния системы на участках траектории описаны в таблице 1.

Таблица 1 – Управление и изменение переменных состояния на трёх участках

Параметр состояния	Вход	Установившееся движение	Выход
Нормальная перегрузка n_y	$n_{y,1}$ Формула (25),	$n_{y,0}$ Формула (20)	$n_{y,2}$ Формула (38)
Угол УНВС $\theta(\tau)$	Изменяется от 0 до θ_0 . Формула (30)	θ_0 . Формула (49)	Изменяется от θ_0 до 0. Формула (42)
Высота $h(\theta)$	Изменяется от h_1 до h_{10} . Формула (33)	Изменяется от h_{10} до h_{02} . Формула (51)	Изменяется от h_{02} до h_2 . Формула (44)
Горизонтальное смещение $x(\theta)$	Увеличивается от x_1 до x_{10} . Формулы (36), (52)	Увеличивается x_{10} до x_{02} . Формулы (23), (52)	Увеличивается от x_{02} до x_2 . Формулы (47), (52)

Обозначения и указания на формулы расчёта характерных параметров состояния (граничных значений участков манёвра) даны в таблице 2.



Таблица 2 – Характерные параметры состояния

Параметр состояния	Начало манёвра	Начало установившегося движения	Завершение установившегося движения	Завершение манёвра
Угол наклона УНВС θ	0	θ_0	θ_0	0
Воздушная скорость v	v_1 . Формула (28)	$v_0 = 1$	$v_0 = 1$	v_2 Формула (40)
Отсчёт времени τ	0	$\tau_{10} = \Delta\tau_1$. Формулы (31), (52)	$\tau_{02} = \tau_{10} + \Delta\tau_0$. Формулы (22), (52)	$\tau_2 = \tau_{02} + \Delta\tau_2$. Формулы (43), (52)
Высота h	h_1	$h_{10} = h_1 + \Delta h_1$. Формула (34)	$h_{02} = h_k - \Delta h_2$. Формула (51)	h_2
Горизонтальное смещение x	x_1 . Формула (50)	$x_{10} = x_1 + \Delta x_1$. Формула (37)	$x_{02} = x_{10} + \Delta x_0$. Формула (24)	$x_k = x_{02} + \Delta x_2$. Формула (48)

4) Примеры расчёта вертикального манёвра

Рассмотрим пример расчёта набора высоты при следующих параметрах движения: воздушная скорость в установившемся режиме $V_0 = 600$ км/час = 166,67 м/с; попутная составляющая скорости ветра $U_x = 20$ м/с; боковой ветер отсутствует.

Нормированные безразмерные значения переменных выражаются как

$$\tau = t \cdot 0,059, \quad h = H \cdot 0,353, \quad v = V \cdot 0,0060, \quad x = X \cdot 0,353, \quad u_x = 0,12,$$

где переменные линейных величин H, X измеряются в километрах, скорости V – в метрах в секунду, а переменная времени t – в секундах.

Предполагается набор высоты с 2000 м до 2500 м ($\Delta h = 0,177$ м). Угол наклона УНВС θ_0 траектории на участке установившегося движения принят $12^\circ = 0,2094$. Согласно формуле (49), угол наклона траектории УНТ на участке установившегося движения равен $10,72^\circ = 0,1871$. Значение нормальной перегрузки на участке прямолинейного движения согласно формуле (20) равно $n_{y,0} = 0,978$.

Граничные значения нормальной перегрузки заданы

$$n_{y,\min} = 0,5, \quad n_{y,\max} = 1,7.$$

В таблице 3 даны числовые значения характерных параметров состояния при наборе, рассчитанные по указаниям таблицы 2.



Таблица 3 – Характерные параметры состояния при наборе

Параметр состояния	Начало манёвра	Начало установившегося движения	Завершение установившегося движения	Завершение манёвра
Угол наклона УНВС θ	0	$\theta_0 = 12^\circ$	$\theta_0 = 12^\circ$	0
Воздушная скорость v	$v_1 = 1,031$	$v_0 = 1$	$v_0 = 1$	$v_2 = 0,956$
Отсчёт времени τ, t	0	$\tau_{10} = 0,302$; $t_{10} = 5,14$ с	$\tau_{02} = 0,791$; ($\Delta\tau_2 = 0,413$); $t_{02} = 13,43$ с ($\Delta t_2 = 6,97$ с)	$\tau_2 = 1,204$; $t_2 = 20,40$ с
Высота h, H	$h_1 = 0,706$; $H_1 = 2000$ м	$h_{10} = 0,738$; ($\Delta h_1 = 0,032$); $H_{10} = 2090$ м ($\Delta H_1 = 90$ м)	$h_{02} = 0,840$; ($\Delta h_2 = 0,043$); $H_{02} = 2378$ м ($\Delta H_2 = 121$ м)	$h_2 = 0,883$; $H_2 = 2500$ м
Горизонтальное смещение x, X	$x_1 = -0,174$; $X_1 = -493$ м	$x_{10} = 0,169$; ($\Delta x_1 = 0,343$); $X_{10} = 479$ м ($\Delta X_1 = 971$ м)	$x_{02} = 0,706$; ($\Delta x_2 = 0,447$); $X_{02} = 1998$ м ($\Delta X_2 = 1266$ м)	$x_2 = 1,153$; $X_2 = 3264$ м

Изменение высоты на участке установившегося движения, рассчитанное по формуле (51), равно $\Delta h_0 = 0,102$ ($\Delta H_0 = 288$ м). Длительность движения на этом участке согласно формуле (22) равна $\Delta\tau_0 = 0,489$ ($\Delta t_0 = 8,301$ с). Горизонтальное смещение на участке установившегося снижения согласно формуле (24) равно $\Delta x_0 = 0,537$ ($\Delta X_0 = 1519$ м).

На основании рассчитанных и указанных в таблице 3 моментов времени τ_1, τ_0, τ_2 переключения функции управления n_y выполнено численное моделирование системы уравнений (5), (6), (7), (19). На рисунках 2...5 представлены зависимости фазовых переменных для рассмотренного числового примера.

На рисунке 2 показана зависимость воздушной скорости от времени $v(\tau)$ манёвра. Красными точками обозначены характерные состояния системы управления: начало манёвра и начало входа в набор, завершение входа и начало прямолинейного участка, завершение прямолинейного участка и начало выхода, завершение манёвра. Величина воздушной скорости при выполнении манёвра не убывает, при этом уменьшение скорости на участках входа и выхода не превышает 5%.

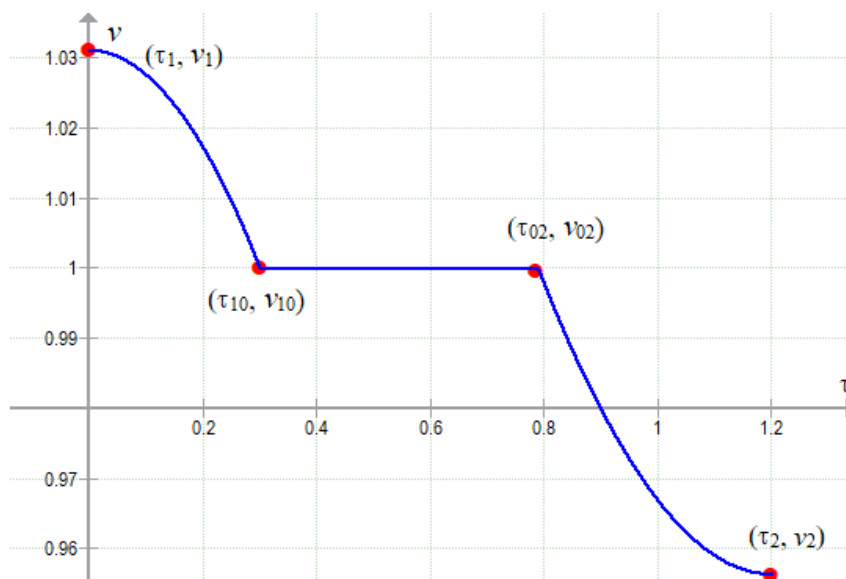


Рис. 2. Изменение воздушной скорости

На рисунке 3 показана фазовая плоскость системы управления с переменными состояниями (θ, h) , на которой построена фазовая траектория с тремя участками манёвра. Стрелками показано направление движения, точками – характерные состояния.

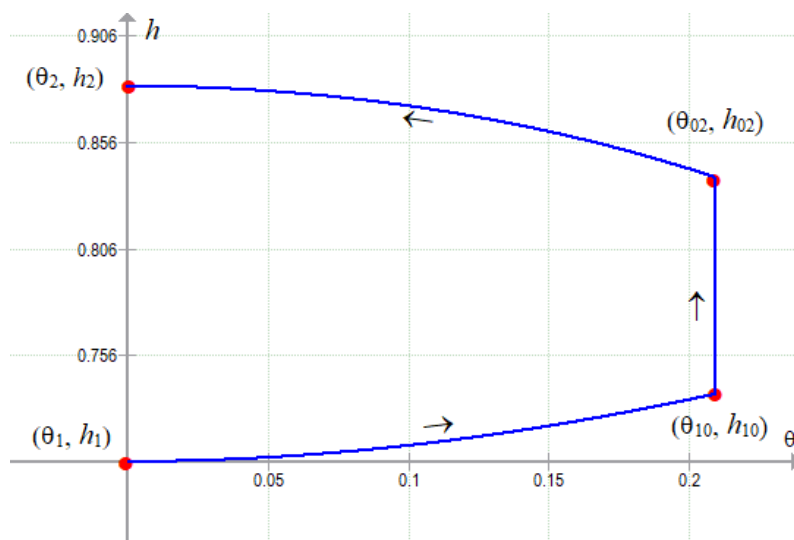


Рис. 3. Движение на фазовой плоскости (θ, h)

На рисунке 4 показан вертикальный профиль набора в исходных размерных переменных-координатах X, H (км), при этом горизонтальная дальность полёта составила около $X \approx 3$ км, а горизонтальное упреждение входа в набор не превышает 1 км.

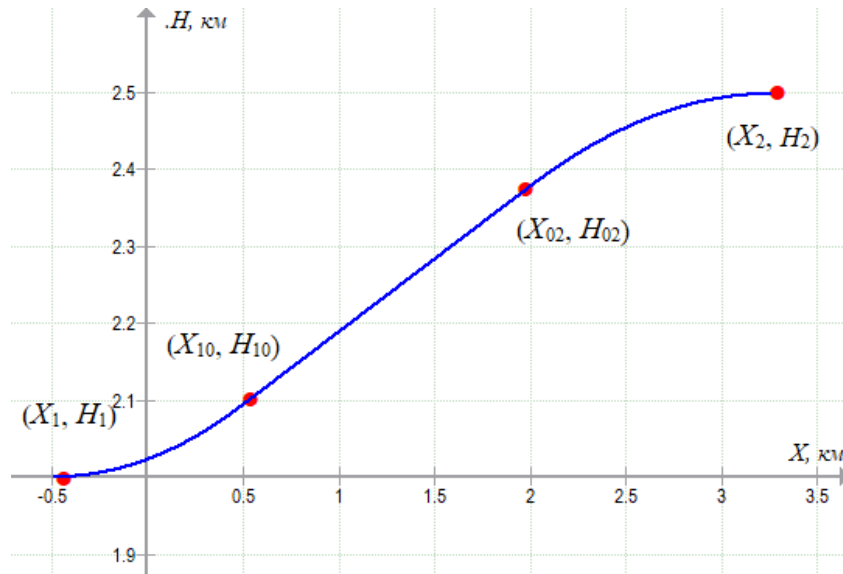


Рис. 4. Вертикальный профиль набора

На рисунке 5 более детально представлен профиль на участке входа, который может быть аппроксимирован кубической параболой.

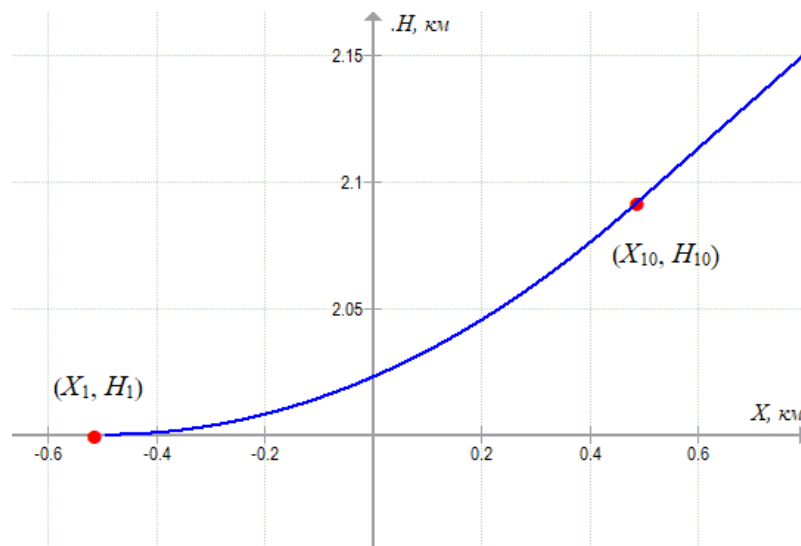


Рис. 5. Вертикальный профиль участка входа

Заключение

Рассмотренный алгоритм, синтеза программного управления при наборе высоты основан на методах теории математической оптимизации и учитывает ограничения на возможные значения нормальной перегрузки при входе в манёвр и выходе из него.

Полученные на основании указанного подхода структура функции управления, выражения соответствующих фазовых траекторий и характерных состояний рассматриваемой системы управления составляют законченную методику решения поставленной задачи вертикального маневрирования. Разработанный метод допускает дальнейшее уточнение математической модели движения, включая учёт инерционности управляющего воздействия [8], [9], а также использование других критериев оптимальности и краевых условий выполнения манёвра, в частности, по горизонтальной дальности и длительности [10]. Кроме того, при рассмотрении большого интервала высот может быть принято во внимание изменение плотности и температуры воздуха.

Представленный числовой пример и результаты численного моделирования



подтверждают работоспособность алгоритма.

Рассмотренная задача управления вертикальным маневрированием и оценки параметров соответствующей траектории возникает при смене высоты эшелона на маршруте, а также при выполнении манёвра кабрирования. Предложенная методика может быть использована при разработке алгоритмов программно-математического обеспечения многометодных пилотажно-навигационных комплексов летательных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Николаев Л. С.* Аэродинамика и динамика полёта транспортных самолётов / Л. С. Николаев. – М.: Транспорт. 1990. – 392 с.
2. *Баранов В. Н.* Решение задачи оптимального управления пространственным движением легкого самолета на основе принципа максимума Понтрягина / В. Н. Баранов, Лин У. Зо // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2011. – № 46. – 10 с.
3. *Атанс Ж.* Оптимальное управление / Ж. Атанс, П. Л. Фалб. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
4. *Афанасьев В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
5. *Черноусько Ф. Л.* Методы управления нелинейными механическими системами / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 328 с.
6. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1973. – 228 с.
7. *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
8. *Александров В. М.* Вычисление оптимального управления линейной системой с инерционным управлением / В. М. Александров // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2015. – т. 18, № 1. – С. 1–13.
9. *Голубева А. А.* Методика выбора значений параметров этапа взлёт самолётов гражданской, военно-транспортной авиации и беспилотных летательных аппаратов / А. А. Голубева, Н. В. Куланов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2020. – № 1. – с. 143–160.
10. *Алесов М. Б.* Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении продольного перемещения / М. Б. Алесов // Навигация и управление летательными аппаратами. – 2022. – №4 (39). – с. 2-20.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алесов Михаил Борисович

Ведущий инженер, канд. техн. наук, доцент
АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро»
Россия, 195009, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21
E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

Калябин Артём Владимирович

Техник
АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро»
Россия, 195009, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21
E-mail: avkalyabin@spb.rpkb.ru



INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alesov Mikhail Borisovich

Lead engineer, PhD. Tech. Sciences, associate Professor
Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau Corp
21, Mikhailova str., Saint-Petersburg, 195009, Russia
E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

Kalyabin Artem Vladimirovich

Technician
Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau Corp
21, Mikhailova str., Saint-Petersburg, 195009, Russia
E-mail: avkalyabin@spb.rpkb.ru

Дата поступления: 23.04.2026
Дата принятия: 03.05.2026